

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

CLASA a IV-a

Subiectul 1.

Aflați perechile de numere naturale (a, b) care verifică relația

$$2025 : [2016 : 8 - 3 \times (3 \times a + 2 \times b)] = 9.$$

Soluție

$$2016 : 8 - 3 \times (3 \times a + 2 \times b) = 225 \quad 2p$$

$$252 - 3 \times (3 \times a + 2 \times b) = 225 \quad 1p$$

$$3 \times (3 \times a + 2 \times b) = 27 \quad 1p$$

$$3 \times a + 2 \times b = 9 \quad 1p$$

Se obține $3 \times 1 + 2 \times 3 = 9$ și $3 \times 3 + 2 \times 0 = 9$, deci perechile sunt $(1,3)$ și $(3,0)$ 2p

Subiectul 2.

Pe ecranul unui calculator sunt scrise numerele 1, 2, 5 și 7. După fiecare secundă numerele se modifică astfel: primul număr se mărește cu 1, al doilea număr se mărește cu 2, al treilea număr se mărește cu 3, iar al patrulea număr se mărește cu 4.

a) Aflați suma numerelor afișate pe ecran după primele trei secunde.

b) După cât timp suma numerelor afișate pe ecran este egală cu 2025?

Gazeta matematică 9/2025

Soluție

a) La fiecare secundă suma numerelor afișate se mărește cu $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 1.5p

După primele trei secunde suma numerelor afișate pe ecran este

$$S = (1 + 2 + 5 + 7) + 3 \times 10 = 45 \quad 1.5p$$

b) Dacă n este numărul secundelor trecute până când suma numerelor afișate pe ecran este 2025, atunci

$$2025 = (1 + 2 + 5 + 7) + n \times 10 \quad 2p$$

Se obține

$$n = 201. \quad 2p$$

Subiectul 3.

Ioana a confecționat niște cartonașe, pe fiecare cartonaș a scris câte un număr natural format din șase cifre, cu suma cifrelor fiecărui număr egală cu 51. Ioana a așezat cartonașele în ordinea crescătoare a numerelor scrise pe cartonaș.

a) Determinați numerele scrise pe primele trei și pe ultimele trei cartonașe.

b) Câte cartonașe a confecționat Ioana?

Soluție

- a) Primele trei numere sunt: 699999, 789999, 798999 1p
 Ultimele trei numere sunt: 999897, 999987, 999996 1p
 b) Fiecare număr trebuie să conțină cel puțin trei cifre de 9 1p
 există 20 de numere care conțin trei cifre de 9 1p
 există 30 de numere care conțin patru cifre de 9 1p
 există 6 de numere care conțin cinci cifre de 9 1p
 În total, sunt afișate $20 + 30 + 6 = 56$ de numere/cartonașe 1p

Subiectul 4.

Se consideră numerele naturale nenule a , b și c .

Împărțind pe a la b obținem câtul 4 și restul 2.

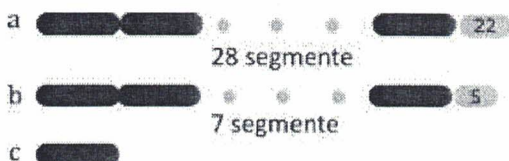
Împărțind pe b la c obținem câtul 7 și restul 5.

a) Arătați că $a \geq 190$.

b) Determinați cele trei numere a , b și c , știind că $2 \times a + 3 \times b + c = 839$.

Soluție

Cum c este cel mai mic număr, avem că b este de 7 ori mai mare și încă cinci unități, deci a este de $7 \times 4 = 28$ de ori mai mare și încă $5 \times 4 + 2 = 22$ unități.



Cum $c \geq 6$, se obține $a \geq 28 \times 6 + 22 = 190$ 1p

Egalarea părților:

$$2 \times 28 + 3 \times 7 + 1 = 78 \text{ părți} \dots \dots 839 - 2 \times 22 - 3 \times 5 = 780$$

Care este cel mai mic număr? 2p

$$780 : 78 = 10$$

Care este cel de al doilea număr? 2p

$$10 \times 7 + 5 = 75$$

Care este cel mai mare număr? 2p

$$10 \times 28 + 22 = 302$$

Răspuns: 302, 75, 10

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA A V-A

Subiectul 1. a) Se consideră numărul $n = 100 \pm 99 \pm 98 \pm 97 \pm 96$. Arătați că putem alege semnele $+$ și $-$ astfel încât $n = 100$. Arătați că nu putem alege semnele $+$ și $-$ astfel încât $n = 101$.

b) Putem alege semnele $+$ și $-$ astfel încât să aibă loc egalitatea $2024 \pm 2023 \pm 2022 \pm \dots \pm 2 \pm 1 = 2025$?

Supliment Gazeta Matematică 9/ 2025, Sebastian Gabriel Sava

Soluție: a) $100 + 99 - 98 - 97 + 96 = 100$ 2p

Deoarece oricum am alege semnele $+$ și $-$ numărul n este par, rezultatul nu poate fi 101. 2p

b) Numerele impare care apar în sumă sunt 1, 3, ..., 2023. Deoarece $1 = 2 \cdot 1 - 1$; $3 = 2 \cdot 2 - 1$; ..., $2023 = 2 \cdot 1012 - 1$, sunt 1012 numere impare. Rezultă că suma este număr par și deci nu poate fi egală cu 2025. 3p

Subiectul 2. Suma a zece numere naturale este 2025. Împărțind fiecare dintre aceste numere la același număr natural nenul n , obținem resturi egale cu 2 sau 3. Suma tuturor acestor resturi este 27.

a) Câte resturi, din cele zece, sunt egale cu 2?

b) Determinați cel mai mic număr n care îndeplinește condițiile din problemă.

Soluție: a) Notăm cu a și cu b numărul numerelor care dau restul 2, respectiv restul 3, la împărțirea cu n .

Cum $a + b = 10$ și $2 \cdot a + 3 \cdot b = 27$, rezultă $a = 3$, $b = 7$. Răspuns: 3. 3p

b) Evident $n \geq 4$. Dacă notăm cu $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ cele zece cături și cu $r_1, r_2, \dots, r_{10}$ cele zece resturi, atunci

$(n \cdot c_1 + r_1) + (n \cdot c_2 + r_2) + \dots + (n \cdot c_{10} + r_{10}) = 2025$ 2p

Obținem $n \cdot (c_1 + c_2 + \dots + c_{10}) + (r_1 + r_2 + \dots + r_{10}) = 2025$ și de aici $n \cdot (c_1 + c_2 + \dots + c_{10}) = 1998$ 1p

Cel mai mic număr natural $n \geq 4$ la care se împarte exact 1998 este 6. Așadar $n = 6$ 1p

Subiectul 3. Numerele naturale nenule se scriu în următorul tablou de numere:

rândul 1: 1

rândul 2: 2, 3

rândul 3: 4, 5, 6

rândul 4: 7, 8, 9, 10

.....

a) Calculați cea mai mare diferență a două numere situate pe rândul 6.

b) Determinați cel mai mare element de pe rândul 100.

c) Pe ce rând se află numărul 2025?

Soluție: a) Rândul 5 va conține numerele 11, 12, 13, 14, 15, iar rândul 6, numerele 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Cea mai mare diferență, pe rândul 6, este $21 - 16 = 5$ 2p

b) Cel mai mare număr de pe rândul 1 este 1, de pe rândul 2 este $1 + 2 = 3$, de pe rândul 3 este $1 + 2 + 3 = 6$, de pe rândul 4 este $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ..., de pe rândul 100 este $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$ 2p

c) Numărul 2025 se va afla pe un rând n . Pe acest rând, ultimul număr va fi $1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot (n + 1) : 2$.

Așadar n este primul număr natural (deci cel mai mic) pentru care $2025 \leq n \cdot (n + 1) : 2$.

Rezultă $n \cdot (n + 1) \geq 4050$. Deoarece $63 \cdot 64 = 4032 < 4050$ și $64 \cdot 65 = 4160 > 4050$, obținem $n = 64$ 2p

Numărul 2025 se află pe rândul 64. 1p

Subiectul 4. Aflați toate numerele naturale de trei cifre distincte care îndeplinesc următoarea condiție: dacă eliminăm o cifră, numărul rămas și răsturnatul acestuia sunt de 8, respectiv 14 ori mai mari ca numărul format cu cifra eliminată.

Soluție: Fie $\overline{abc}$ unul dintre numerele căutate.

Dacă eliminăm cifra a , condiția devine: $\overline{bc} = 8 \cdot a$ și $\overline{cb} = 14 \cdot a$ 1p

Metoda 1: Adunând cele două egalități, obținem $11 \cdot (b + c) = 22 \cdot a$, rezultând că $b + c = 2 \cdot a$ (1). 1p

Scăzând cele două egalități, obținem $(10 \cdot c + b) - (10 \cdot b + c) = 14 \cdot a - 8 \cdot a$ sau, altfel, $9 \cdot c = 6 \cdot a + 9 \cdot b$.

Rezultă $3 \cdot c = 2 \cdot a + 3 \cdot b$ (2). 1p

Înlocuind $2 \cdot a$ din relația (1) în relația (2), deducem că $3 \cdot c = b + c + 3 \cdot b$ și de aici $c = 2 \cdot b$.

Relația (1) devine $3 \cdot b = 2 \cdot a$ 1p

b este număr par, rezultând că c se împarte exact la 4. Așadar $c = 4$ sau $c = 8$ (nu convine $c = 0$).

Pentru $c = 4$ obținem $b = 2$ și $a = 3$. Numărul este 324. 1p

Pentru $c = 8$ obținem $b = 4$ și $a = 6$. Numărul este 648. 1p

Metoda 2: Din $\overline{cb} = 14 \cdot a$, rezultă că $\overline{cb}$ poate lua valorile 14, 28, 42, 56, 70 sau 84. 2p

Așadar $\overline{bc}$ poate lua valorile 41, 82, 24, 65, 07 sau 48.

Deoarece $\overline{bc} = 8 \cdot a$, valorile convenabile ale numărului $\overline{bc}$ sunt 24 și 48. 2p

În aceste cazuri, $a = 3$, respectiv $a = 6$. Obținem numerele 324 și 648. 1p

Analog, dacă îl eliminăm pe b , numerele sunt 234 și 468, iar dacă îl eliminăm pe c , numerele sunt 243 și 486. 1p

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VI-A

Subiectul 1. Numerele naturale a , b și c verifică relația $2a + 7b = 5c$. Demonstrați că numărul $P = (a+b)(b+c)(c+a)$ este divizibil cu 70.

Gazeta Matematică

Soluție: $2a + 7b = 5c \Rightarrow 2(a+b) + 5b = 5c \Rightarrow 2(a+b):5$ și cum $(2,5)=1$, avem $(a+b):5$. (1)2p

Din $2a + 7b = 5c \Rightarrow 7a + 7b = 5c + 5a \Rightarrow 7(a+b) = 5(c+a) \Rightarrow 5(c+a):7$ și cum $(7,5)=1$, avem $(c+a):7$. (2)

.....2p

Cum avem trei numere naturale a , b , c atunci cel puțin două dintre ele au aceeași paritate, de unde rezultă că unul dintre factorii $a+b$, $b+c$, $c+a$ este număr par și deci P este divizibil cu 2. (3)2p

Din (1), (2), (3) rezultă că $P:2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow P:70$1p

Subiectul 2. Determinați perechile de numere prime (p, q) cu proprietatea că $pq - p$ și $pq + q$ sunt simultan pătrate perfecte.

Soluție: $pq - p = a^2 \Rightarrow p|a^2$ și cum p este număr prim, rezultă $p|a \Rightarrow p^2|a^2 \Rightarrow p^2|pq - p \Rightarrow p|q - 1$

$\Rightarrow p \leq q - 1$ (1)3p

Din $pq + q = b^2 \Rightarrow q|b^2$ și cum q este număr prim, rezultă $q|b \Rightarrow q^2|b^2 \Rightarrow q^2|pq + q \Rightarrow q|p + 1 \Rightarrow q \leq p + 1$. (2)

.....3p

Din (1), (2) rezultă că $p = q - 1$. Cum p și q sunt numere prime, obținem $p = 2, q = 3$. În acest caz $pq - p = 2^2$
 $pq + q = 3^2$1p

Subiectul 3. Spunem că o mulțime M de numere naturale are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă suma oricăror trei elemente ale sale este un număr prim.

a) Dați exemplu de mulțime cu proprietatea $(\mathcal{P})$ știind că are 4 elemente.

b) Arătați că nu există mulțimi cu proprietatea $(\mathcal{P})$, având mai mult de 4 elemente.

Soluție:

a) Cum $1 + 5 + 7 = 13$; $1 + 7 + 11 = 19$; $1 + 5 + 11 = 17$; $5 + 7 + 11 = 23$, atunci $M = \{1, 5, 7, 11\}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$.

.....2p

b) Presupunem că există mulțime $M \subset \mathbb{N}$, M are proprietatea $(\mathcal{P})$ și $\text{card}(M) \geq 5$.

Dacă, printre elementele lui M , există 3 care dau același rest la împărțirea prin 3

$(x = 3a + r, y = 3b + r, z = 3c + r, r \in \{0, 1, 2\}, a, b, c \in \mathbb{N})$, atunci $x + y + z = 3(a + b + c + r)$, cu $x + y + z > 3$, atunci $x + y + z$ nu este număr prim.3p

În caz contrar, din principiul cutiei, există 3 numere care dau (oricare două) resturi diferite la împărțirea prin 3.
 $x = 3a + 0, y = 3b + 1, z = 3c + 2, a, b, c \in \mathbb{N}$

Cazul I. Dacă $a = b = c = 0$, atunci $M = \{0, 1, 2, t, u, \dots\}$. Cum $t + u + 0 = t + u$ și $t + u + 1$ trebuie să fie prime, rezultă $t + u = 2$. Atunci $t + u + 2 = 4$ care nu e prim.

Cazul II. Dacă cel puțin unul dintre numerele a, b, c este diferit de zero, atunci $x + y + z = 3(a + b + c + 1)$ cu $x + y + z > 3$, atunci $x + y + z$ nu este număr prim.

Deci nu există mulțime cu proprietatea ($\mathcal{P}$) cu mai mult de 4 elemente.3p

Subiectul 4. Dacă acele unui ceasornic arată ora 12, la ce oră minutarul și secundarul fac pentru prima dată unghiul de 177° ?

Soluție: Notăm cu x unghiul parcurs de minutar. Deoarece secundarul este de 60 de ori mai rapid, el va parcurge un unghi de $60 \cdot x$2p

Atunci unghiul dintre secundar și minutar va fi de $60x - x = 59x$. Din $59x = 177^\circ \Rightarrow x = 3^\circ$3p

Dar minutarul parcurge 360° într-o oră (în 60 minute), deci 6° pe minut, deci el a parcurs 3° într-o jumătate de minut, deci secundarul parcurge un unghi de 120° .

Prin urmare, ora căutată este 12:00:30 (ora 12 și 30 de secunde).2p

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VII-A

Subiectul 1. Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ știind că $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} \in \mathbb{N}$ și $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} \in \mathbb{N}$.

Soluție: Calculăm $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} \cdot \frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = \frac{5(2a+b)}{a+2b} \cdot \frac{5(2b+a)}{2a+b} = 25$ 2 p

Cum $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} \in \mathbb{N}$ și $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} \in \mathbb{N}$, avem cazurile:

I. $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = 1$ și $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = 25$.

Din $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = 1 \Rightarrow \overline{ab}+4b = a+2b \Leftrightarrow 10a+5b = a+2b \Rightarrow 9a+3b = 0$ fals.....1 p

II. $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = 25$ și $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = 1$.

Din $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = 1 \Rightarrow \overline{ba}+4a = 2a+b \Leftrightarrow 10b+5a = 2a+b \Leftrightarrow 3a+9b = 0$ fals1 p

III. $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = 5$ și $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = 5$

Din $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = 5 \Rightarrow \overline{ab}+4b = 5(a+2b) \Leftrightarrow 10a+5b = 5(a+2b) \Rightarrow 2a+b = a+2b \Leftrightarrow a=b$

Din $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = 5 \Rightarrow \overline{ba}+4a = 5(2a+b) \Leftrightarrow 10b+5a = 5(2a+b) \Leftrightarrow 2b+a = 2a+b \Leftrightarrow a=b$ 2 p

$\Rightarrow \overline{ab} \in \{11, 22, \dots, 99\}$ 1 p

Subiectul 2. Fie numerele naturale p, q, r mai mari ca 2. Arătați că printre numerele $\sqrt{\frac{p \cdot q - 2}{3}}$, $\sqrt{\frac{q \cdot r - 2}{3}}$ și

$\sqrt{\frac{r \cdot p - 2}{3}}$ se află cel puțin unul irațional.

Soluție: Presupunem că toate numerele sunt raționale. Atunci există $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât

$pq - 2 = 3a^2$, $qr - 2 = 3b^2$ și $rp - 2 = 3c^2$ 2 p

Înmulțind relațiile obținem că $(pqr)^2 = (3a^2 + 2)(3b^2 + 2)(3c^2 + 2) = M_3 + 2$ 3 p

Această relație este falsă deoarece un pătrat perfect are doar una din formele M_3 sau $M_3 + 1$. Deci cel puțin unul din numere este irațional. 2 p

Subiectul 3. Fie mulțimea de numere reale $A = \{1+4\sqrt{2}; 2+4\sqrt{2}; 3+4\sqrt{2}; \dots; 10+4\sqrt{2}\}$. Arătați că există o partiție a mulțimii A în două submulțimi B și C ($B \cup C = A$ și $B \cap C = \emptyset$) astfel încât B să aibă opt elemente, C să aibă două elemente, iar raportul dintre media aritmetică a elementelor mulțimii B și produsul elementelor mulțimii C să fie $\frac{1}{8}$.

Gazeta Matematică 6-7-8/2025

Soluție: Fie $C = \{a+4\sqrt{2}, b+4\sqrt{2}\}$, cu $1 \leq a < b \leq 10$ și $a, b \in \mathbb{N}$, iar $B = A \setminus C$

Suma elementelor mulțimii A este $1+2+3+\dots+10+40\sqrt{2} = 55+40\sqrt{2}$ 2 p

Suma elementelor mulțimii B este $55+40\sqrt{2} - (a+b+8\sqrt{2}) = 55-(a+b)+32\sqrt{2}$ 1 p

Din ipoteză $\frac{55-(a+b)+32\sqrt{2}}{8} = \frac{(a+4\sqrt{2})(b+4\sqrt{2})}{8} \Leftrightarrow 55-(a+b)+32\sqrt{2} = ab+32+4\sqrt{2}(a+b) \Leftrightarrow$

$23-(a+b)+32\sqrt{2} = ab+4\sqrt{2}(a+b)$, $a, b \in \mathbb{N}$ 2 p

Deducem că $\begin{cases} 23-(a+b) = ab \\ a+b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 15 \\ a+b = 8 \end{cases}$ 1 p

$a=3, b=5$ verifică relațiile, deci $C = \{3+4\sqrt{2}, 5+4\sqrt{2}\}$, iar $B = A \setminus C$ 1 p

Subiectul 4. În patrulaterul convex $ABCD$ punctele M, N, P , respectiv Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DA .

a) Arătați că $MP \leq \frac{AD+BC}{2}$. Când are loc egalitatea?

b) Dacă $MP = QN = \frac{AB+BC+CD+DA}{4}$, arătați că $ABCD$ este romb.

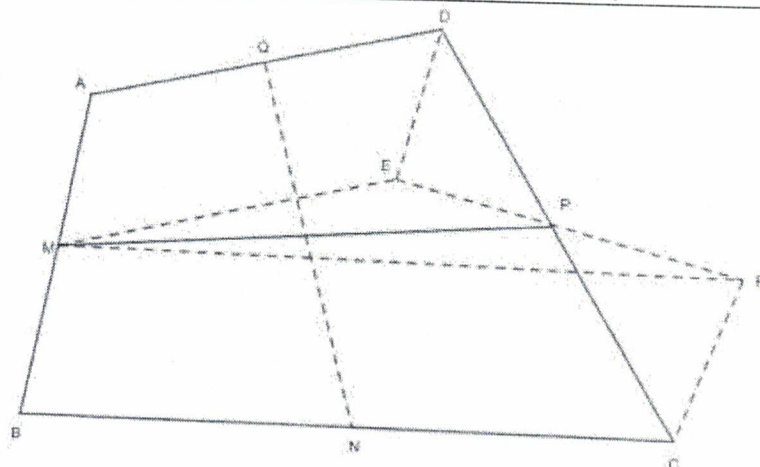
Soluție:

a) Construim paralelogramele $AMED$ și $BMFC \Rightarrow DE \equiv AM \equiv BM \equiv FC, DE \parallel AM \parallel FC \Rightarrow DE \equiv FC, DE \parallel FC \Rightarrow DEFC$ paralelogram (eventual degenerat, dacă $AD \parallel BC$, atunci M, E, F, P coliniare). Deci P mijlocul lui (EF) 1 p

MP mediană în triunghiul MEF (triunghiul poate fi și degenerat) $\Rightarrow MP \leq \frac{ME+MF}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MP \leq \frac{AD+BC}{2}$ 1 p

Egalitatea are loc când M, E, F, P coliniare $\Leftrightarrow AD \parallel BC$ 1 p



b) $MP \leq \frac{AD+BC}{2}$, analog $QN \leq \frac{AB+CD}{2}$. Prin însumarea celor două relații obținem

$$MP+QN \leq \frac{AB+BC+CD+DA}{2}, \text{ dar din ipoteză } MP+QN = \frac{AB+BC+CD+DA}{2} \Rightarrow MP = \frac{AD+BC}{2} \text{ și}$$

$$QN = \frac{AB+CD}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Deducem că $AD \parallel BC$ și $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ paralelogram.....1 p

de unde $MP \equiv AD, QN \equiv AB$, dar $MP \equiv QN$, de unde rezultă că $AD \equiv AB \Rightarrow ABCD$ romb.....1 p

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Fie x și y două numere reale, astfel încât $x \in [-25, 20]$ și $x - 45y + 25 = 0$. Determinați valoarea sumei $S = \sqrt{x^2 + y^2 + 50x + 625} + \sqrt{x^2 + y^2 - 40x - 2y + 401}$.

Andrei Horvat-Marc

Soluție: Avem $S = \sqrt{(x+25)^2 + y^2} + \sqrt{(x-20)^2 + (y-1)^2}$ 2p
Din $x - 45y + 25 = 0$ obținem $x + 25 = 45y$, deci $(x+25)^2 = 2025y^2$ 1p
Din $x - 45y + 25 = 0$ obținem $x - 20 = 45(y-1)$, deci $(x-20)^2 = 2025(y-1)^2$ 1p
Rezultă $S = \sqrt{2025y^2 + y^2} + \sqrt{2025(y-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2026} \cdot (|y| + |y-1|)$ 1p
Cum $x \geq -25$, rezultă că $45y = x + 25 \geq 0$, deci $y \geq 0$, așadar $|y| = y$ 1p
Cum $x \leq 20$, rezultă că $45(y-1) = x - 20 \leq 0$, deci $y - 1 \leq 0$, așadar $|y-1| = 1 - y$. Prin urmare, $S = \sqrt{2026}$ 1p

Subiectul 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\sqrt{x} \right] + \left\{ \sqrt{x} \right\} = x$.

(Notațiile $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a .)

Dana Heuberger

Soluție: Condiție de existență: $x \geq 0$. Notăm $\{x\} = f \in (0, 1)$ și $[x] = k \in \mathbb{N}$.

i). Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci ecuația devine $\left[\sqrt{x} \right] = x$ 1p
Aplicând inegalitatea părții întregi, rezultă $0 \leq x \leq \sqrt{x} < x+1$, deci $x^2 \leq x < x^2 + 2x + 1$ 1p
Deoarece $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rămâne că $x^2 \leq x$, deci $x \in [0, 1] \cap \mathbb{N}$, așadar $x \in \{0, 1\}$. Ambele valori verifică ipoteza, deci sunt soluții. 1p
ii). Dacă $x \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N}$, ecuația se rescrie: $\left[\sqrt{k} \right] + \sqrt{f} - \left[\sqrt{f} \right] = k + f$ 1p
 $\sqrt{f} \in (0, 1)$, deci $\left[\sqrt{f} \right] = 0$ și $0 \leq \sqrt{f} - f = k - \left[\sqrt{k} \right] \in \mathbb{N}$ 2p
Rezultă $\sqrt{f} - f \in (0, 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, așadar nu există soluții în acest caz. Soluția este $S = \{0, 1\}$ 1p

Subiectul 3. Fie tetraedrul $SABC$, cu $AC = SC$, și punctele D, E, F pe muchiile AB, BC , respectiv AC , astfel încât $\angle ADF = \angle BDE = \angle ACB$ și $BE = AF$. Dacă bisectoarea unghiului BCS intersectează dreapta BS în punctul K , demonstrați că $AS \parallel (DFK)$.

Gazeta Matematică 3/2025, Mihaela Berindeanu

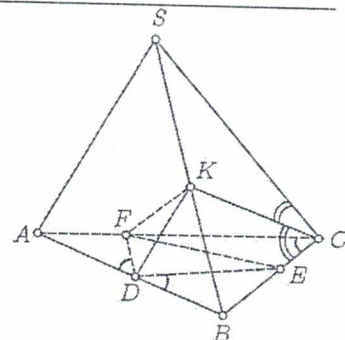
Soluție: $\triangle ADF \sim \triangle ACB$ (U.U.), deci $\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC}$. (1) 2p

$\triangle BDE \sim \triangle BCA$ (U.U.), deci $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB} = \frac{AF}{AB}$. (2) 2p

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$, deci $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{SC}{BC}$ 1p

Din teorema bisectoarei în triunghiul BCS , avem $\frac{SK}{BK} = \frac{SC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ 1p

Așadar $AS \parallel DK$ și cum $DK \subset (DFK)$ deducem că $AS \parallel (DFK)$ 1p



Subiectul 4. Fie prisma dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ având o bază paralelogramul $ABCD$. Se consideră punctele M, N', P și Q' pe muchiile $AB, C'D', BC$, respectiv $A'D'$, astfel încât $AM = D'N'$ și $A'Q' = BP$. Demonstrați că dreptele MN' și PQ' sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{AM}{AB} + \frac{BP}{BC} = 1$.

Dana Heuberger

Soluție: Fie punctele N, Q, M', P' pe muchiile $CD, AD, A'B', B'C'$, cu $MM' \parallel NN' \parallel PP' \parallel QQ' \parallel AA'$. Notăm $\{T\} = MN \cap PQ$, $\{T'\} = M'N' \cap P'Q'$, $AB = a, BC = b$ și $AA' = c, AM = D'N' = x$ și $A'Q' = BP = y$.

Metoda I: Notăm $\alpha = (MM'N'N)$ și $\beta = (PP'Q'Q)$.

Evident, $\alpha \cap \beta = TT'$, $MN' \subset \alpha$ și $PQ' \subset \beta$. (*)

Fie $MN' \cap TT' = \{X\}$ și $PQ' \cap \beta = \{Y\}$.

Din (*) rezultă că MN' și PQ' sunt concurente dacă și numai dacă MN' și PQ' se întâlnesc pe dreapta de intersecție a planelor α și β .

Așadar MN' și PQ' sunt concurente $\Leftrightarrow MN', PQ'$ și TT' sunt concurente

$\Leftrightarrow X = Y \Leftrightarrow XT + YT' = TT' = c$ 3p

$\triangle MXT \sim \triangle N'XT'$ (U.U.), deci $\frac{MT}{TN'} = \frac{XT}{T'X} \Leftrightarrow \frac{y}{b-y} = \frac{XT}{T'X} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \frac{XT}{TT'} \Leftrightarrow XT = \frac{cy}{b}$ 2p

Analog, din $\triangle PYT \sim \triangle Q'YT'$ obținem $YT' = \frac{cx}{a}$. Așadar, $XT + YT' = c \Leftrightarrow \frac{cy}{b} + \frac{cx}{a} = c \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 2p

Metoda a II-a: „ $\Rightarrow$ ” Dacă dreptele MN' și PQ' sunt concurente, atunci sunt coplanare, și cum $Q'N' \subset (A'B'C')$ și $MP \subset (ABC)$, iar $(ABC) \parallel (A'B'C')$, rezultă că $Q'N' \parallel MP$. Dar $Q'N' \parallel QN$, deci $QN \parallel MP$ 1p

Așadar $\triangle TNQ \sim \triangle TMP$, deci $\frac{QT}{PT} = \frac{NT}{MT}$, adică $\frac{x}{a-x} = \frac{b-y}{y} \Leftrightarrow ab = bx + ay \Leftrightarrow 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ 2p

„ $\Leftarrow$ ” Dacă $\frac{AM}{AB} + \frac{BP}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + ay = ab \Leftrightarrow xy = (a-x)(b-y) \Leftrightarrow \frac{x}{a-x} = \frac{b-y}{y} \Leftrightarrow \frac{QT}{PT} = \frac{TN}{MT}$ 1p

Cum $\sphericalangle QTN = \sphericalangle MNP$, rezultă că $\triangle TNQ \sim \triangle TMP$, deci $\sphericalangle QNT = \sphericalangle PMT$ 1p

Prin urmare, $MP \parallel QN$ și cum $QN \parallel Q'N'$, rezultă că $MP \parallel Q'N'$ 1p

M, P, N', Q' sunt coplanare și $MN' \cap Q'P \neq \emptyset$ 1p

